

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Начальник
учебно-методического отдела
Т.Ф. Артеменко**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория множеств и математическая логика
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 54 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук, без звания, директор

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Базой современной математики является теория множеств, а базой любого математического рассуждения – математическая логика. Цель курса – ознакомить студентов с основными понятиями и результатами теории множеств и математической логики, вводя только те современные технические понятия и методы, которые для этого строго необходимы. Основное внимание уделяется формализации интуитивной теории множеств, аксиоматическим теориям и их моделям. Курс доводится до теории алгоритмов и проблем вычислимости и разрешимости. Дальнейшие понятия логики, в частности модальные и нестандартные логики и их топологические модели изучаются в последующих специальных курсах математической логики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Формирование базовых знаний по теории множеств и математической логике для дальнейшего использования в других математических дисциплинах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории множеств и математической логики;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов математической логики и теории множеств с контекстом математических дисциплин

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия классической и современной теории множеств, основы аксиоматических теорий и теории моделей.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с логическими теориями и теорией множеств.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теория множеств Цермело-Френкеля.	2	2		4
2	Бинарные отношения и функции.	2	2		4
3	Индукция.	2	2		4
4	Вполне упорядоченные множества.	4	4		8
5	Аксиома выбора и эквивалентные ей утверждения.	2	2		4
6	Логика высказываний.	2	2		4
7	Логика предикатов и теория моделей.	6	6		12
8	Модели арифметики.	2	2		4
9	Некоторые основные теоремы.	2	2		4
10	Машина Тьюринга.	2	2		2
11	Теорема Поста.	2	2		2
12	Неразрешимость проблемы остановки.	2	2		2
Итого часов		30	30		54
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

1. Теория множеств Цермело-Френкеля.

Теория множеств Цермело-Френкеля.
Функции и декартово произведение.

2. Бинарные отношения и функции.

Бинарные отношения.
Классы эквивалентности.
Инъективные, сюръективные, биективные функции .

3. Индукция.

Система натуральных чисел.
Аксиомы Дедекинда-Пeano.
Принцип Дирихле.

4. Вполне упорядоченные множества.

Отношение порядка.
Вполне упорядоченное множество.
Начальные отрезки.
Трансфинитная рекурсия.

5. Аксиома выбора и эквивалентные ей утверждения.

Аксиома выбора.
Теорема Цермело.
Лемма Цорна.

6. Логика высказываний.

Логика высказываний.
Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.

7. Логика предикатов и теория моделей.

Логика предикатов.
Термы и формулы.
Семантика логики предикатов.
Модели.
Гомоморфизмы, изоморфизмы, автоморфизмы моделей.
Предваренная нормальная форма.
Модель теории.
Нормальные модели.
Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов.

8. Модели арифметики.

Теорема Геделя о неполноте.
Теорема Геделя-Мальцева о компактности.

9. Некоторые основные теоремы.

Теорема Левенгейма-Сколема об элементарной подмодели.

Теорема Мальцева о повышении мощности.

10. Машина Тьюринга.

Понятие алгоритма.

Машина Тьюринга.

Тезис Черча-Тьюринга.

Разрешимые и перечислимые множества.

11. Теорема Поста.

Теорема Поста.

Разрешимые теории.

Универсальная вычислимая функция.

12. Неразрешимость проблемы остановки.

Неразрешимость проблемы остановки.

Теорема Успенского-Райса.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вводный курс математической логики [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, Н. К. Плиско .— 2-е изд. — М. : Физматлит, 2002, 2007 .— 128 с.

Дополнительная литература

1. Начала теории множеств [Текст] / Н. К. Верещагин, А. Шень, М., МЦНМО, 2012
2. Вычислимые функции [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 4-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2008, 2012 .— 160 с.
3. Языки и исчисления [Текст] : лекции по мат. логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень .— 4-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2012 .— 240 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>

<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Математика
профиль подготовки: Фундаментальная математика
Высшая школа современной математики
Высшая школа современной математики
курс: 1
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Экзамен

Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук, без звания, директор
М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория множеств и математическая логика» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия классической и современной теории множеств, основы аксиоматических теорий и теории моделей.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с логическими теориями и теорией множеств.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория множеств и математическая логика» осуществляется в форме экзамена. Экзамен проводится в устной форме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Теория множеств Цермело-Френкеля. Функции и декартово произведение.
2. Бинарные отношения, классы эквивалентности. Инъективные, сюръективные, биективные функции.
3. Индукция, система натуральных чисел. Аксиомы Дедекинда-Пeano, принцип Дирихле.
4. Отношение порядка. Вполне упорядоченное множество. Начальные отрезки.
5. Трансфинитная рекурсия.
6. Аксиома выбора, теорема Цермело, лемма Цорна.
7. Логика высказываний. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.
8. Логика предикатов. Термы и формулы. Семантика логики предикатов. Модели.
9. Гомоморфизмы, изоморфизмы, автоморфизмы моделей. Предваренная нормальная форма.
10. Модель теории. Нормальные модели. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов.
11. Теоремы Геделя о неполноте и Геделя-Мальцева о компактности. Модели арифметики.
12. Теоремы Левенгейма-Сколема об элементарной подмодели, Мальцева о повышении мощности.
13. Понятие алгоритма. Машина Тьюринга. Тезис Черча-Тьюринга. Разрешимые и перечислимые множества.
14. Теорема Поста. Разрешимые теории. Универсальная вычислимая функция.
15. Неразрешимость проблемы остановки. Теорема Успенского-Райса.

Пример экзаменационного билета:

- 1) Бинарные отношения, не являющиеся эквивалентностью
- 2) Теорема Геделя о неполноте

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.